

第3讲 二次函数图象专题（二）

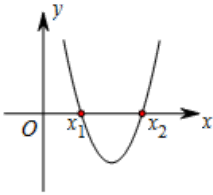
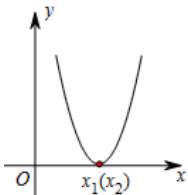
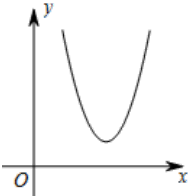
一、二次函数与方程综合

□知识回顾：

求抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴的交点：

令_____，得到一元二次方程_____，此一元二次方程的解就是抛物线与_____轴交点的_____坐标值。

因此：二次函数图象与 x 轴的交点情况决定一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 根的情况。

判别式	图象	与 x 轴的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有_____个交点 $(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$ $(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$	有_____的实数根 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$		只有_____个交点 $(-\frac{b}{2a}, 0)$	有_____的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$		_____交点	_____实数根

！注意：

当 $\Delta > 0$ 时，与 x 轴两个交点的距离为_____

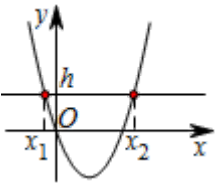
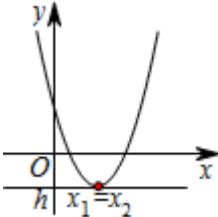
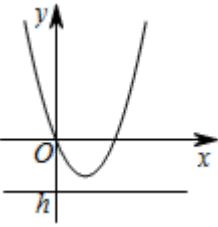
□思考：

求抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点：

令_____，得到一元二次方程_____，此一元二次方程的解就是抛物线

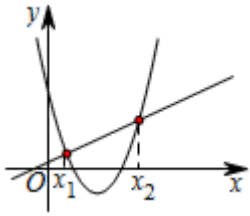
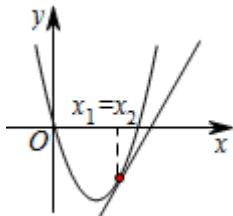
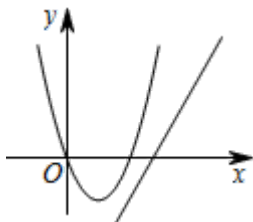
$y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点的_____坐标值。

因此，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = h$ 的交点情况决定一元二次方程 $ax^2 + bx + c - h = 0$ 根的情况。

判别式	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = h$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有_____个交点	有_____的实数根
$\Delta = 0$		有_____个交点	有_____的实数根
$\Delta < 0$		_____交点	_____实数根

求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y = mx + n$ 的交点：

联立 $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$ ，得到一元二次方程_____，此方程的解即是两个函数交点的_____坐标值，再将横坐标代入任意一个解析式求交点的纵坐标。

判别式	图象 (以 $a > 0$ 为例)	与直线 $y = mx + n$ 的交点情况	一元二次方程根的情况
$\Delta > 0$		有_____个交点	有_____的实数根
$\Delta = 0$		有_____个交点	有_____的实数根
$\Delta < 0$		_____交点	_____实数根

🔗 举个“栗”子

栗子1

1. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a > 0$) 经过点 $(1, 0)$, $(0, -1)$, 其对称轴在 y 轴右侧。

有下列结论：

- ① $a - b - 1 = 0$;
- ② 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根为 1 , 另一个根为 $-\frac{1}{a}$;
- ③ $a > 1$ 。

其中，正确结论的个数为 ()。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

栗子2

2. 已知抛物线 $y = (m+1)x^2 - 2mx + m - 2$ 与 x 轴有两个交点 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$. 现有如下结论: ① 此抛物线过定点 $(1, -1)$; ② 若抛物线开口向下, 则 m 的取值范围是 $-2 < m < -1$; ③ 若 $m > -1$ 时, 有 $-2 < x_1 < -1$, $1 < x_2 < 2$, 则 m 的取值范围是 $-\frac{2}{9} < m < \frac{1}{4}$. 其中正确结论的个数是 ().
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

栗子3

3. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表:

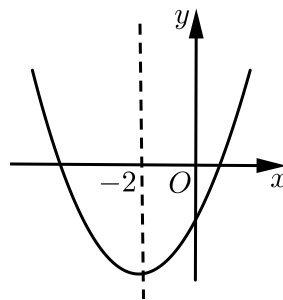
x	...	-2	-1	0	1	2	...
$y = ax^2 + bx + c$	...	t	m	-2	-2	n	...

且当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 与其对应的函数值 $y > 0$. 有下列结论:

- ① $abc > 0$; ② -2 和 3 是关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = t$ 的两个根; ③ $0 < m + n < \frac{20}{3}$.

其中, 正确结论的个数是 ().

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
4. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的大致图象如图所示, 顶点坐标为 $(-2, -9a)$, 下列结论:
- ① $abc > 0$; ② $4a + 2b + c > 0$; ③ $5a - b + c = 0$; ④ 若方程 $a(x+5)(x-1) = -1$ 有两个根 x_1 和 x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $-5 < x_1 < x_2 < 1$; ⑤ 若方程 $|ax^2 + bx + c| = 2$ 有四个根, 则这四个根的和为 -4, 其中正确的结论有 ().



- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

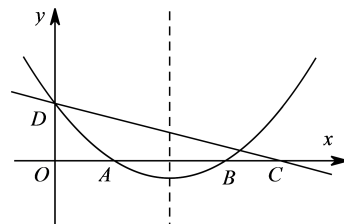
栗子4

5. 已知二次函数 $y = 1 - (x-a)(x-b)$, 其中 $a < b$, m, n ($m < n$) 是方程 $1 - (x-a)(x-b) = 0$ 的两个根, 则实数 a, b, m, n 的大小关系是 ().
- A. $a < m < n < b$ B. $m < a < b < n$ C. $a < m < b < n$ D. $m < a < n < b$

栗子5

6. 如图，直线 $y = kx + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象都经过 y 轴上的 D 点，抛物线与 x 轴交于 A 、 B 两点，其对称轴为直线 $x = 1$ ，且 $OA = OD$ 。直线 $y = kx + c$ 与 x 轴交于点 C （点 C 在点 B 的右侧）。则下列命题中正确命题的个数是（ ）。

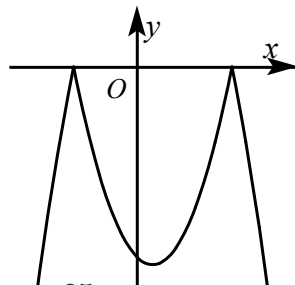
① $abc > 0$ ；② $3a + b > 0$ ；③ $-1 < k < 0$ ；④ $k > a + b$ ；⑤ $ac + k > 0$ 。



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

栗子6

7. 已知二次函数 $y = -x^2 + x + 6$ 及一次函数 $y = 2x - m$ ，将该二次函数在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方，图象的其余部分不变，得到一个新函数的图象（如图所示），当直线 $y = 2x - m$ 与新函数图象有4个交点时， m 的取值范围是（ ）。

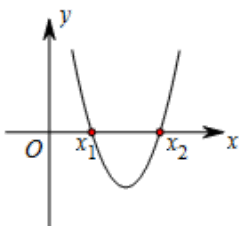
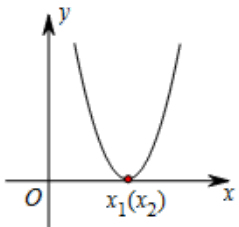
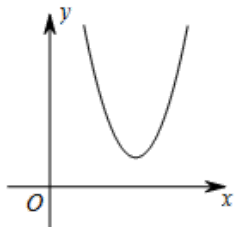


- A. $-4 < m < 6$ B. $-\frac{25}{4} < m < -4$ C. $6 < m < \frac{33}{4}$

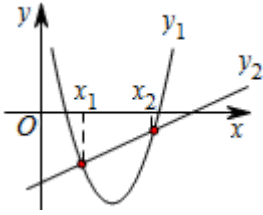
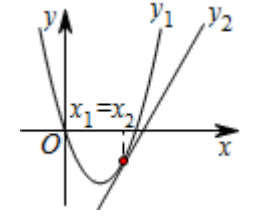
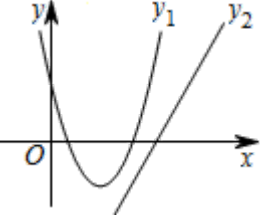
- D. $-\frac{25}{4} < m < 6$

二、二次函数与不等式综合

1. $ax^2 + bx + c > 0$ 型不等式

图象	与 x 轴的交点情况	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集
	有 ____ 个交点	_____ 或 _____	_____
	有 ____ 个交点	_____ (或 _____ _)	_____
	____ 交点	_____	_____

2. 抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y_2 = mx + n(m > 0)$ 的不等关系：

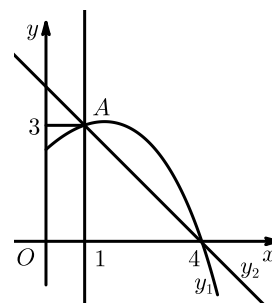
图象	两个函数的交点情况	$y_1 > y_2$ 的解集	$y_1 < y_2$ 的解集
	有 ____ 个交点	_____ 或 _____	_____
	有 ____ 个交点	_____	_____
	_____ 交点	_____	_____

栗子7

8. 如图是抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 的一部分，抛物线的顶点坐标 $A(1, 3)$ ，与 x 轴的一个交点为 $B(4, 0)$ ，直线 $y_2 = mx + n(m \neq 0)$ 与抛物线交于 A 、 B 两点，结合图象分析下列结论：

- ① $2a + b = 0$ ；
- ② $abc > 0$ ；
- ③方程 $ax^2 + bx + c = 3$ 有两个相等的实数根，
- ④当 $1 < x < 4$ 时，有 $y_2 < y_1$ ；
- ⑤抛物线与 x 轴的另一个交点是 $(-1, 0)$ ，

其中正确的是（ ）。



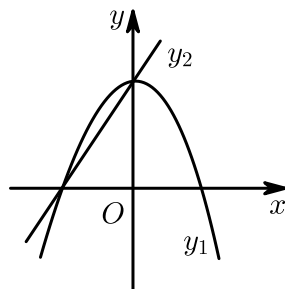
A. ①②③

B. ②④

C. ①③④

D. ①③⑤

9. 如图, 已知抛物线 $y_1 = -2x^2 + 2$, 直线 $y_2 = 2x + 2$, 当 x 任取一值时, x 对应的函数值分别为 y_1 , y_2 , 若 $y_1 \neq y_2$, 取 y_1, y_2 中的较小的值记为 M , 若 $y_1 = y_2$, 记 $M = y_1 = y_2$, 例如: 当 $x = 1$ 时, $y_1 = 0, y_2 = 4, y_1 < y_2$, 此时 $M = 0$, 下列判断: ①当 $x > 0$ 时, $y_1 > y_2$; ②当 $x < 0$ 时, x 值越大, M 值越小; ③使得 M 大于2的 x 值不存在; ④使得 $M = 1$ 的 x 值是 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其中正确的个数是().



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

栗子8

10. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数且 $a \neq 0$) 中的 x 与 y 的部分对应值如下表:

x	-1	0	1	3
y	-1	3	5	3

给出了结论:

(1) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 有最大值, 最大值为5; (2) $ac < 0$; (3) $x > 1$ 时, y 的值随 x 值的增大而减小; (4) 3是方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的一个根; (5) 当 $-1 < x < 3$ 时, $ax^2 + (b-1)x + c > 0$. 则其中正确结论的个数是().

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

栗子9

11. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = 1$, 且与 x 轴、 y 轴分别交于 A, B 两点, 其中点 A 在点 $(3, 0)$ 的右侧, 直线 $y = -\frac{1}{2}x + c$ 经过 A, B 两点.

有下列结论:

- ① $c > \frac{3}{2}$;
② $2a + 2b + c > 0$;
③ $-\frac{1}{2} < a < 0$.

其中正确的结论是().

- A. ① B. ①② C. ②③ D. ①②③

三、二次函数其它综合

1. 二次函数恒过定点问题

已知抛物线解析式为 $y = mx^2 - 2mx + 3$ ，整理二次函数为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ ，则可得到此函数一定经过定点 $\underline{\hspace{2cm}}$ 和 $\underline{\hspace{2cm}}$

栗子10

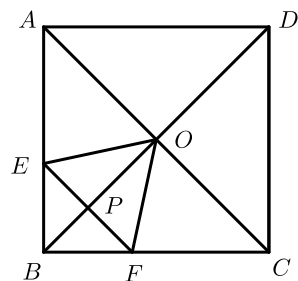
12. 已知抛物线 $y = x^2 + 2mx - 3m$ (m 是常数)，且无论 m 取何值，该抛物线都经过某定点 H ，则点 H 的坐标为 () .

- A. $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ C. $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ D. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

2. 二次函数与几何综合

栗子11

13. 在边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， P 是 BD 上一动点，过 P 作 $EF \parallel AC$ ，分别交正方形的两条边于点 E ， F 。设 $BP = x$ ， $\triangle OEF$ 的面积为 y ，当 $1 < x < 2$ 时， y 与 x 之间的关系式为 () .



- A. $y = -x^2 + x$ B. $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x$ C. $y = -x^2 + 3x - 2$ D. $y = x^2 - 3x + 2$